

Solutions TP10 - Contact hertzien

David Trif

16 juin 2010

Exercice 1

Avec les valeurs pour la puissance $P = 500 \text{ W}$ et la fréquence de rotation $N = 200 \text{ rot/min}$, on calcule le moment de torsion :

$$M_t = \frac{P}{2\pi N} = \frac{500 \cdot 60}{2\pi \cdot 200} = 23,87 \text{ Nm} \quad (1)$$

Au niveau des dents, la vitesse vaut :

$$v = \pi N d_1 = \pi \cdot 200 \text{ tr/min} \cdot 80 \text{ mm} = 50264 \text{ mm/min} = 0,837 \text{ m/s} \quad (2)$$

L'effort Q (au niveau des dents) :

$$Q = \frac{P}{v} = \frac{500 \text{ W}}{0,837 \text{ m/s}} = 597,3 \text{ N} \quad (3)$$

La force F , qui est appliquée au niveau du point de contact (figure 1) :

$$F = \frac{Q}{\cos \beta} = \frac{597,3 \text{ N}}{\cos 20^\circ} = 635,7 \text{ N} \quad (4)$$

Calcul des rayons intérieurs (profil dents) :

$$r_1 = \frac{d_1}{2} \cdot \sin 20^\circ = \frac{80}{2} \cdot \sin 20^\circ = 13,68 \text{ mm} \text{ (figure 1)} \quad (5)$$

$$r_2 = \frac{d_2}{2} \cdot \sin 20^\circ = \frac{100}{2} \cdot \sin 20^\circ = 17,1 \text{ mm} \text{ (figure 1)} \quad (6)$$

Les courbures dans les 2 directions x_1 et x_2 (figure 2) :

$$\text{Roue 1} \rightarrow \rho_{1I} = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{13,68} = 0,073 \cdot 10^{-1} \text{ mm} \text{ et } \rho_{2I} = 0 \quad (7)$$

$$\text{Roue 2} \rightarrow \rho_{1II} = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{17,1} = 0,058 \cdot 10^{-1} \text{ mm} \text{ et } \rho_{2II} = 0 \quad (8)$$

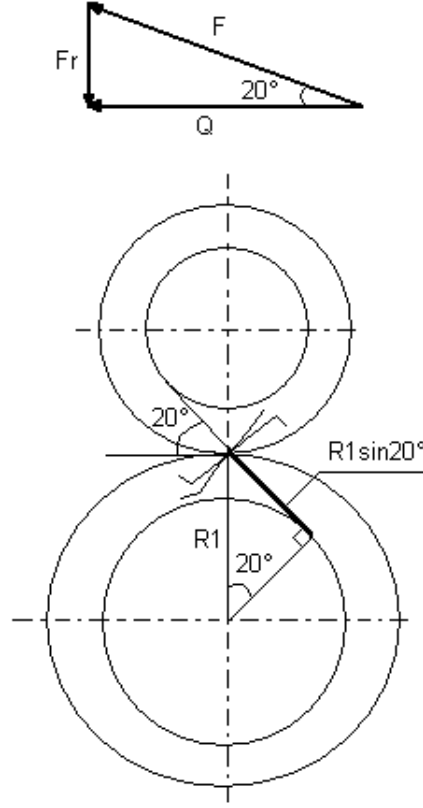


FIGURE 1 – Calcul rayon intérieur d'un dent

La somme des courbures :

$$\sum \rho = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II}) = (0,073 \cdot 10^{-1} + 0,058 \cdot 10^{-1}) + (0 + 0) \quad (9)$$

$$\sum \rho = 0,131 \text{ mm}^{-1} \quad (10)$$

La dissymétrie du contact :

$$F(\rho) = \frac{|(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})|}{\sum \rho} = 1 \quad (\text{contact linéaire}) \quad (11)$$

Module équivalent :

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \quad (12)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{210000 \text{ MPa}}{1 - 0,9} = 230800 \text{ MPa} \quad (13)$$

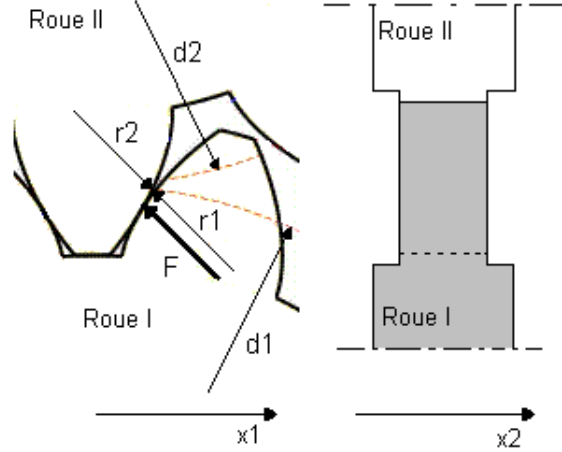


FIGURE 2 – Définition 2 directions x_1 et x_2

Charge par unité de longueur F' (l_a - largeur d'un dent) :

$$F' = \frac{F}{l_a} = \frac{635,7}{10} = 63,57 \text{ N/mm} \quad (14)$$

Calcul nombre de contact :

$$\Pi = \frac{F' \cdot \sum \rho}{E_m} = \frac{63,57 \text{ N/mm} \cdot 0,131 \text{ mm}^{-1}}{230800 \text{ N/mm}^2} = 3,6081 \cdot 10^{-5} \quad (15)$$

La largeur de l'aire de contact :

$$b \cdot \sum \rho = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \Pi} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot 3,6081 \cdot 10^{-5}}}{0,131 \text{ mm}^{-1}} = 0,0731 \text{ mm} \quad (16)$$

La pression de Hertz :

$$\frac{p_h}{E_m} = \sqrt{\frac{\Pi}{2\pi}} \Rightarrow p_h = \sqrt{\frac{3,6081 \cdot 10^{-5}}{2\pi}} \cdot 230800 \text{ MPa} = 553,08 \text{ MPa} \quad (17)$$

Rapprochement moyen :

$$h = 2,537 \frac{F^{0,9}}{E_m^{0,9} \cdot l_a^{0,8}} = 2,537 \frac{635,7^{0,9}}{230800^{0,9} \cdot 10^{0,8}} = 0,002 \text{ mm} \quad (18)$$

Variation maximale de la contrainte de cisaillement (fascicule CH4 $\leftrightarrow e = 0$) :

$$2\tau_0 = 2T_0 \cdot p_h = 0,5 \cdot 553,08 = 276,54 \text{ MPa} \quad (19)$$

La profondeur où la contrainte maximale se produit :

$$z_0 = \zeta_0 \cdot b = 0,5 \cdot 0,0731 = 0,03655 \text{ mm} = 36,55 \text{ } \mu\text{m} \quad (20)$$

Exercice 2

Les courbures dans les 2 directions x_1 et x_2 :

$$\text{Cylindre 1} \rightarrow \rho_{1I} = \frac{1}{150} \text{ mm}^{-1} \text{ et } \rho_{2I} = 0 \quad (21)$$

$$\text{Cylindre 2} \rightarrow \rho_{2I} = \frac{1}{180} \text{ mm}^{-1} \text{ et } \rho_{2II} = 0 \quad (22)$$

La dissymétrie du contact :

$$F(\rho) = \frac{|(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})|}{\sum \rho} = 1 \quad (\text{contact linéaire}) \quad (23)$$

La somme des courbures :

$$\sum \rho = \rho_I + \rho_{II} = \frac{1}{150} + \frac{1}{180} = 0,0122 \text{ mm}^{-1} \quad (24)$$

Module de Young équivalent :

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} \quad (25)$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{210000 \text{ MPa}}{1 - 0,9} = 230800 \text{ MPa} \quad (26)$$

Nombre de contact :

$$\Pi = \frac{F' \cdot \sum \rho}{E_m} = \frac{1000 \text{ N} \cdot 0,0122 \text{ mm}^{-1}}{800 \text{ mm} \cdot 230800 \text{ N/mm}^2} = 6,6194 \cdot 10^{-8} \quad (27)$$

La largeur de l'aire de contact :

$$b \cdot \sum \rho = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \Pi} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot 6,6194 \cdot 10^{-8}}}{0,0122 \text{ mm}^{-1}} = 0,0335 \text{ mm} \quad (28)$$

Calcul de la pression hertzienne :

$$\frac{p_h}{E_m} = \sqrt{\frac{\Pi}{2\pi}} \Rightarrow p_h = \sqrt{\frac{6,6194 \cdot 10^{-8}}{2\pi}} \cdot 230800 \text{ MPa} = 23,68 \text{ MPa} \quad (29)$$

Le rapprochement moyen des 2 cylindres :

$$h = 2,537 \frac{F^{0,9}}{E_m^{0,9} \cdot l_a^{0,8}} = 2,537 \frac{1000^{0,9}}{230800^{0,9} \cdot 800^{0,8}} = 9,01 \cdot 10^{-5} \text{ mm} \quad (30)$$

La pression spécifique :

$$k = \frac{F}{l_a \cdot D} = \frac{1000 \text{ N}}{800 \text{ mm} \cdot 150 \text{ mm}} = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ MPa} \quad (31)$$

Exercice 3

On reprend les données de l'exercice antérieur. Les axes des cylindres sont perpendiculaires.

Les courbures dans les directions x_1 et x_2 (figure 3) :

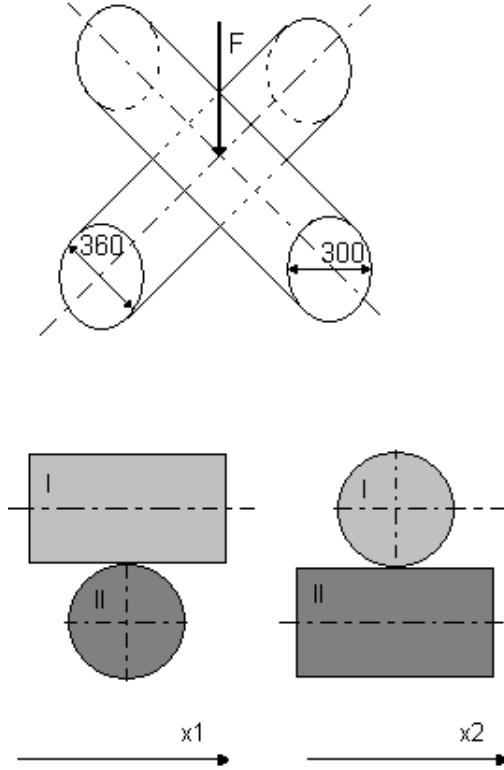


FIGURE 3 – Définition axes principaux, exercice 3

$$\text{Cylindre 1} \rightarrow \rho_{1I} = 0 \text{ et } \rho_{2I} = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{150} \text{ mm}^{-1} \quad (32)$$

$$\text{Cylindre 2} \rightarrow \rho_{1II} = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{180} = \text{mm}^{-1} \text{ et } \rho_{2II} = 0 \quad (33)$$

La somme des courbures :

$$\sum \rho = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II}) = \left(0 + \frac{1}{180}\right) + \left(\frac{1}{150} + 0\right) = 0,0122 \text{ mm}^{-1} \quad (34)$$

La dissymétrie de contact :

$$F(\rho) = \frac{|(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})|}{\sum \rho} = \frac{|(0 + \frac{1}{180}) - (\frac{1}{150} + 0)|}{0,0122} = 0,0909 \quad (35)$$

L'angle auxiliaire θ :

$$\cos(\theta) = F(\rho) \Rightarrow \theta = 84,87^\circ \quad (36)$$

Dans le fascicule *CH2*, avec $\theta = 84,87^\circ$:

$$\begin{cases} 1 - e^2 = 0,23 \Rightarrow e = 0,877 \\ k_a = 1,56 \\ k_b = 1,38 \\ k_h = 1,02 \\ k_p = 0,23 \end{cases}$$

Module de d'élasticité équivalent :

$$E_m = \frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{210000}{1 - 0,3^2} = 230800 \text{ MPa} \quad (37)$$

Nombre de contact :

$$\Pi = \frac{F \cdot (\sum \rho)^2}{E_m} = \frac{1000 \text{ N} \cdot (0,0122 \text{ mm}^{-1})^2}{230800 \text{ N/mm}^2} = 6,4723 \cdot 10^{-7} \quad (38)$$

$$\Pi^{\frac{1}{3}} = 8,6501 \cdot 10^{-3} \quad (39)$$

Dimensions de l'aire de contact (a et b - empreinte elliptique) :

$$a \sum \rho = k_a \cdot \Pi^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a = \frac{1,56 \cdot 8,6501 \cdot 10^{-3}}{0,0122 \text{ mm}^{-1}} = 1,104 \text{ mm} \quad (40)$$

$$b \sum \rho = k_b \cdot \Pi^{\frac{1}{3}} \Rightarrow b = \frac{1,38 \cdot 8,6501 \cdot 10^{-3}}{0,0122 \text{ mm}^{-1}} = 0,976 \text{ mm} \quad (41)$$

La pression de Hertz :

$$\frac{p_h}{E_m} = k_p \cdot \Pi^{\frac{1}{3}} \Rightarrow p_h = 230800 \text{ MPa} \cdot 0,23 \cdot 8,6501 \cdot 10^{-3} = 457,18 \text{ MPa} \quad (42)$$

En général : $dF = dp \times dS$. Si le calcul est correct, la relation $p_h \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b = F$ est vérifiée.

$$\text{Vérification : } p_h \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b = 457,18 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 1,104 \cdot 0,976 = 1032 \text{ N (erreur 3 \%)} \quad (43)$$

Contrainte maximale de cisaillement et la profondeur où elle se produit (fascicule *CH4*) :

$$\tau_{st} = T_{st} \cdot p_h = 0,32 \cdot 457,18 = 146,29 \text{ MPa} \quad (44)$$

$$z_{st} = \zeta_{st} \cdot b = 0,51 \cdot 0,976 = 0,498 \text{ mm} \quad (45)$$

Exercice 4

Sphère en acier (figure 4) :

$$\rho_{1I} = \frac{2}{D} = \frac{2}{50} = 0,04 \text{ mm}^{-1} \quad (46)$$

$$\rho_{2I} = \frac{2}{D} = \frac{2}{50} = 0,04 \text{ mm}^{-1} \quad (47)$$

Pièce 2, avec une surface plane qui vient en contact avec la sphère en acier :

$$\rho_{1II} = 0 \quad (48)$$

$$\rho_{2II} = 0 \quad (49)$$

La somme des courbures :

$$\sum \rho = (\rho_{1I} + \rho_{1II}) + (\rho_{2I} + \rho_{2II}) = (0,04 \cdot 0) + (0,04 \cdot 0) = 0,08 \text{ mm}^{-1} \quad (50)$$

Dissymétrie de contact :

$$F(\rho) = \frac{|\rho_{1I} + \rho_{1II} - (\rho_{2I} + \rho_{2II})|}{\sum \rho} = \frac{0}{0,08} = 0 \quad (\text{contact sphérique}) \quad (51)$$

$$F(\rho) = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \quad (52)$$

Dans le fascicule *CH2* :

$$\begin{cases} 1 - e^2 = 0 \Rightarrow e = 1 \\ k_a = 1,43 \\ k_b = 1,43 \\ k_h = 1,02 \\ k_p = 0,23 \end{cases}$$

Module de Young équivalent :

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}} = \frac{1 - 0,3^2}{210000} + \frac{1 - 0,25^2}{105000} \quad (53)$$

$$E_m = \frac{2}{13,261} \cdot 10^6 = 150800 \text{ MPa} \quad (54)$$

Nombre de contact :

$$\Pi = \frac{F \cdot (\sum \rho)^2}{E_m} = \frac{500 \text{ N} \cdot (0,08 \cdot \text{mm}^{-1})^2}{150800 \text{ N/mm}^2} = 2,122 \cdot 10^{-5} \quad (55)$$

$$\Pi^{\frac{1}{3}} = 2,768 \cdot 10^{-2} \quad (56)$$

Dimensions de l'aire de contact ($a=b$ - contact sphérique, l'empreinte est un cercle) :

$$a \sum \rho = k_a \cdot \Pi^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a = b = \frac{1,43 \cdot 2,768 \cdot 10^{-2}}{0,08 \text{ mm}^{-1}} = 0,494 \text{ mm} \quad (57)$$

Pression hertzienne :

$$p_h = E_m \cdot k_p \cdot \Pi^{\frac{1}{3}} = 150800 \cdot 0,23 \cdot 2,768 \cdot 10^{-2} = 960,05 \text{ MPa} \quad (58)$$

$$\text{Vérification : } p_h \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 = 960,05 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 0,494^2 = 490 \text{ N (erreur 2\%)} \quad (59)$$

Le rapprochement des 2 pièces :

$$h \sum \rho = k_h \cdot \Pi^{\frac{2}{3}} \Rightarrow h = \frac{1,02 \cdot 7,661 \cdot 10^{-4}}{0,08} = 0,0097 \text{ mm} = 9,7 \mu\text{m} \quad (60)$$

Calcul τ_{st} et z_{st} :

$$\text{Fascicule CH4} \rightarrow \tau_{st} = T_{st} \cdot p_h = 0,31 \cdot 960,05 = 297,61 \text{ MPa} \quad (61)$$

$$z_{st} = \zeta_{st} \cdot b = 0,47 \cdot 0,494 = 0,232 \text{ mm} \quad (62)$$

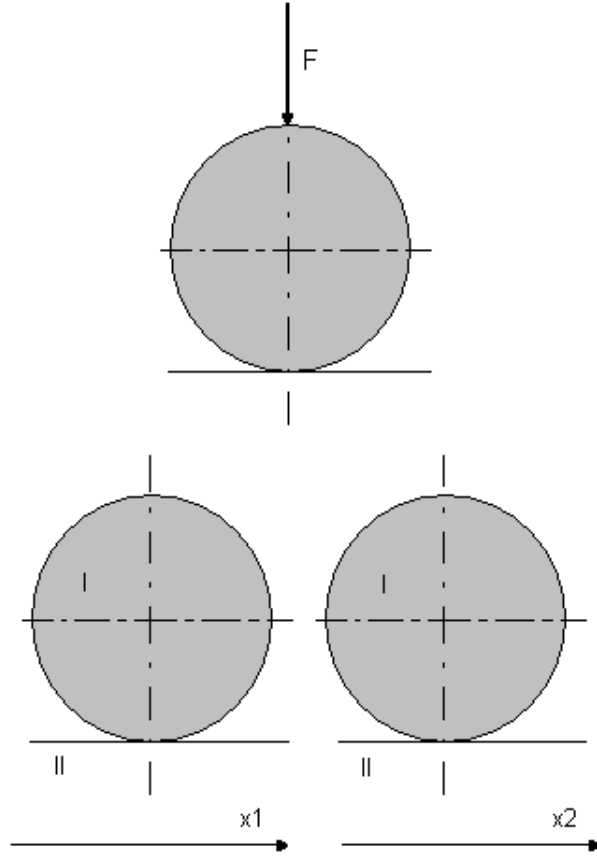


FIGURE 4 – Sphère sur un plan, définition x_1 et x_2

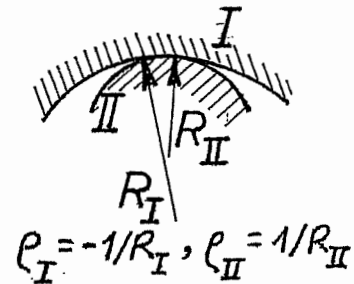
CONTACTS HERTZIENS

1) COURBURES

$$\rho_1 = \pm \frac{1}{R_1} \quad ; \quad \rho_2 = \pm \frac{1}{R_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ si corps convexe} \\ - \text{ si corps concave} \end{array} \right.$$

$$\sum \rho = \rho_{1I} + \rho_{1II} + \rho_{2I} + \rho_{2II}$$

$$F(\rho) = \frac{[(\rho_{1I} + \rho_{1II}) - (\rho_{2I} + \rho_{2II})]}{\sum \rho} \quad : \quad \cos \theta = F(\rho)$$



2) MODULE ÉQUIVALENT E_m

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}}$$

3) CONTACT PONCTUEL

Ellipse de contact d'axes $(2a)$ et $(2b)$. Rapprochement h , sous charge P .

$$\text{Nombre de contact} \quad \Pi = \frac{P(\sum \rho)^2}{E_m}$$

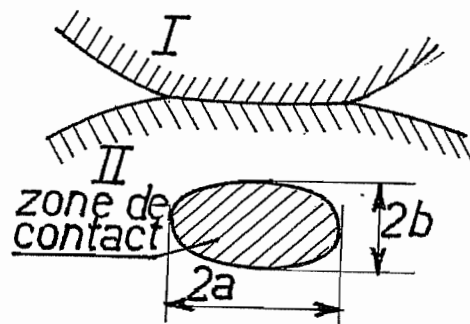
$$a \sum \rho = k_a(\theta) \Pi^{1/3}$$

$$b \sum \rho = k_b(\theta) \Pi^{1/3}$$

$$\frac{p_H}{E_m} = k_p(\theta) \Pi^{1/3}$$

$$h \sum \rho = k_h(\theta) \Pi^{2/3}$$

k_a, k_b, k_p, k_h voir diagramme



$$p = p_H \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}$$

Contact statique : valeur max. de τ :

$$\tau_{st} = T_{st} p_H \text{ à profondeur}$$

$$z_{st} = \zeta_{st} b \text{ (cf. diagramme)}$$

Contact roulant : à la profondeur

$$z_0 = \zeta_0 b, \quad \tau_0 \text{ varie de } -T_0 p_H \text{ à } T_0 p_H$$

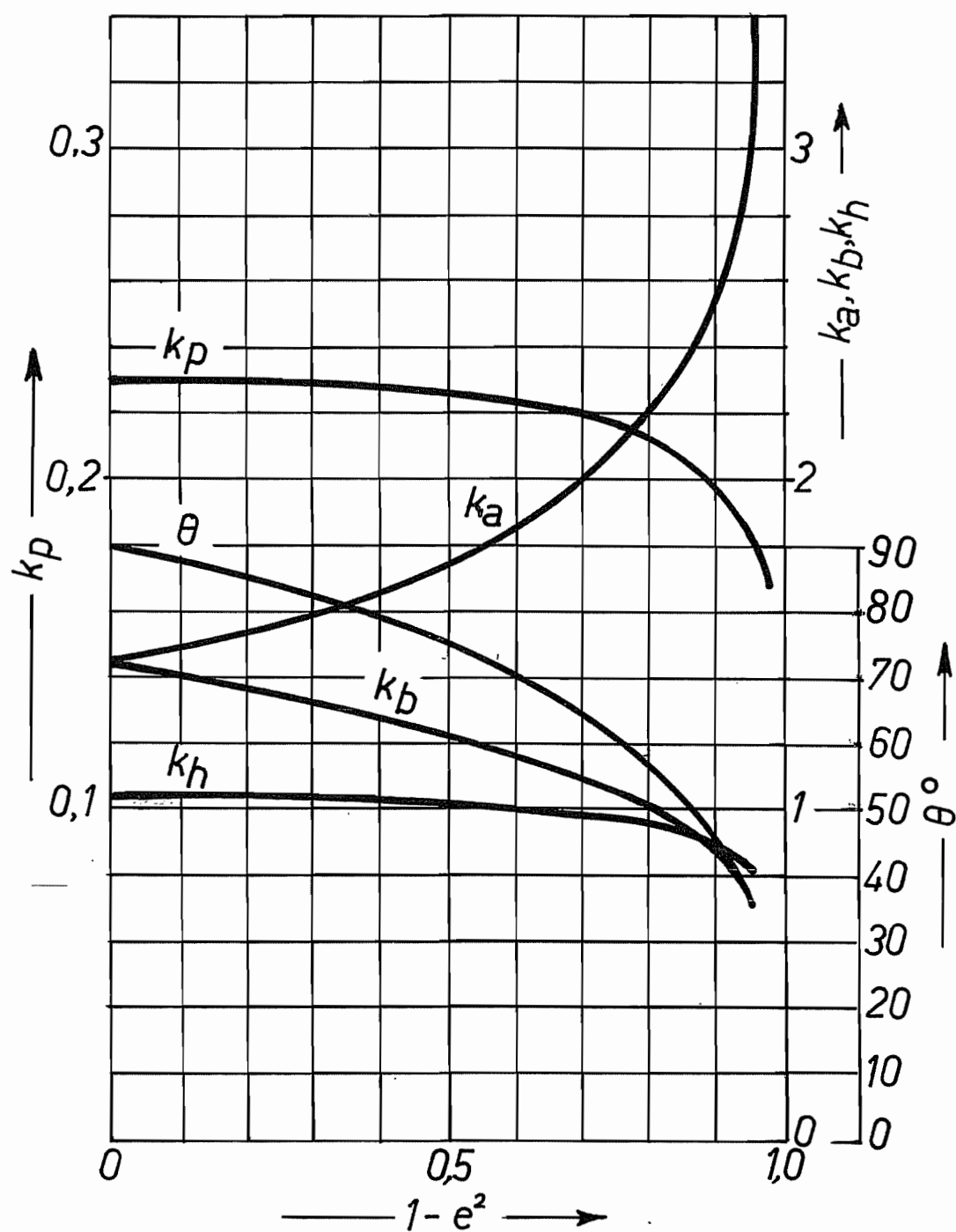
Provoque l'écaillage.

Pression spécifique (sphère sur plan) $k = \frac{P}{D^2}$

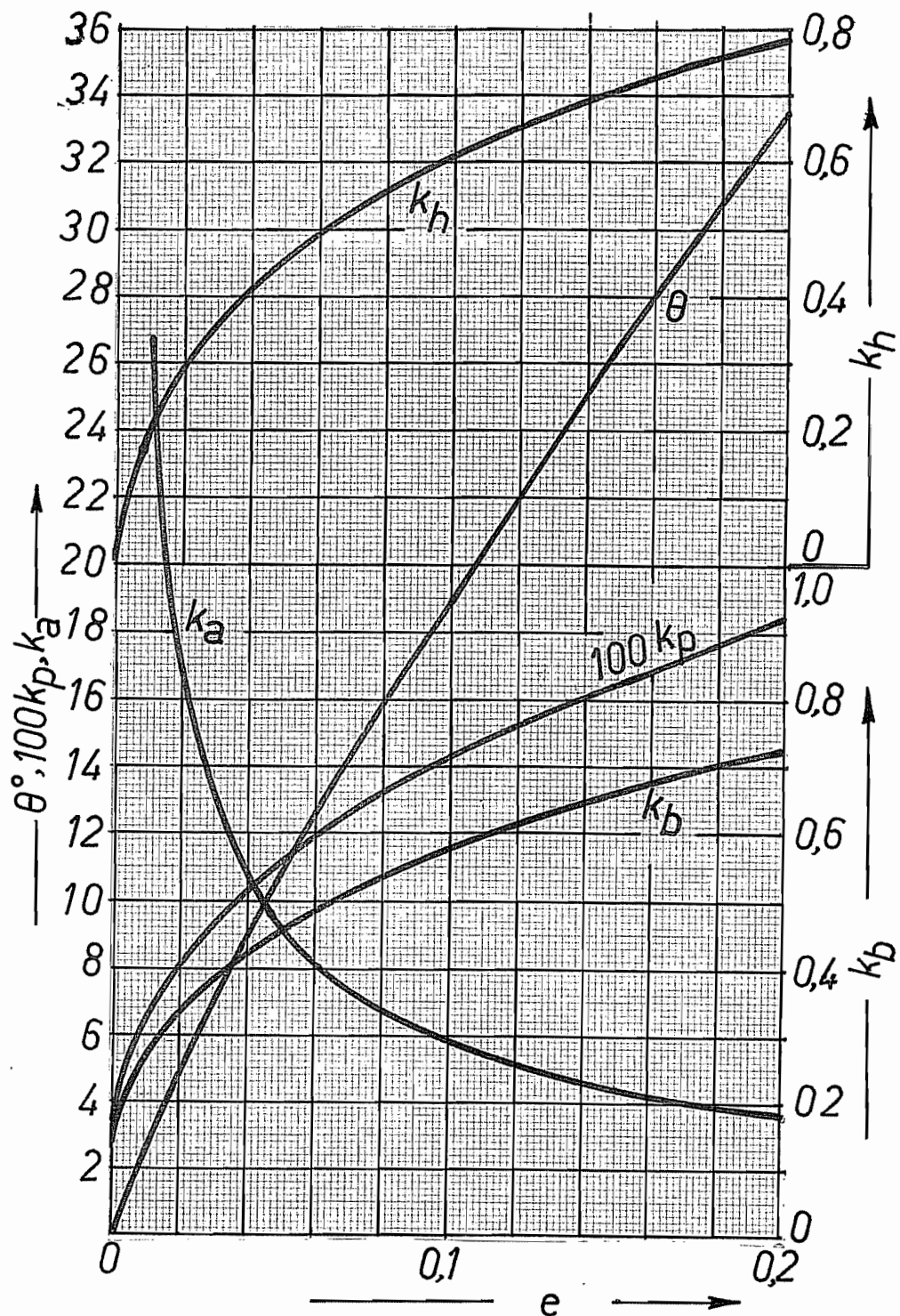
Pression de Stribeck : pression spécifique du problème sphère-plan équivalent (mêmes p et p_H)

$$p_s = \left(\frac{k_p}{0,2296} \right)^3 P(\sum \rho)^2 / 16 = 5,164 \frac{p_H^3}{E_m^2}$$

CONTACT PONCTUEL : $\theta, k_a, k_b, k_p, k_h, e$



CONTACT PONCTUEL

Petites valeurs de e 

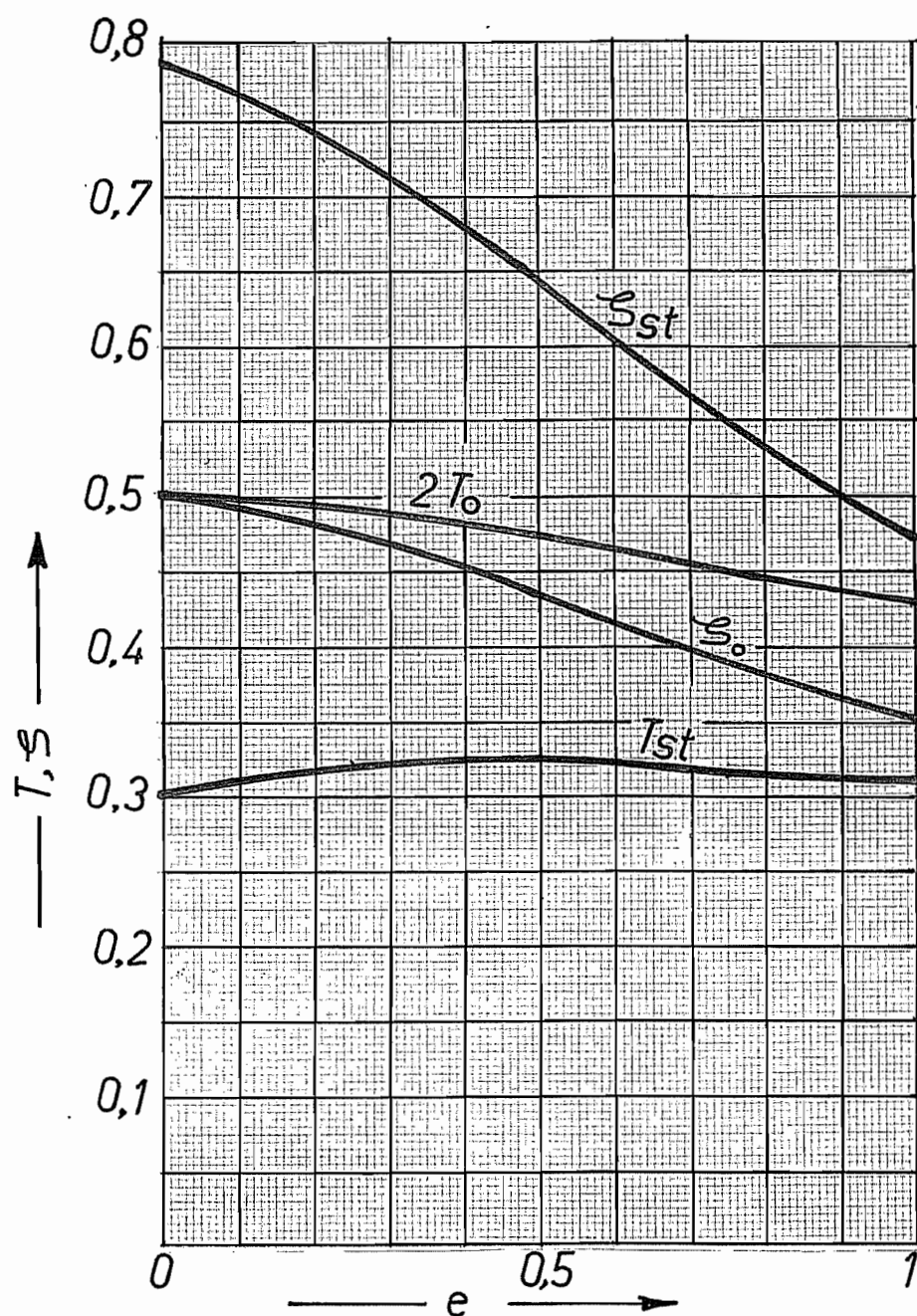
CONTACTS HERTZIENS - TENSIONS

$$\tau_{st} = T_{st} \cdot p_H$$

$$z_{st} = \xi_{st} \cdot b$$

$$\tau_o = T_o \cdot p_H$$

$$z_o = \xi_o \cdot b$$



4) CONTACT LINÉAIRE

Largeur de contact ($2b$) .

$$\sum \rho = \rho_I + \rho_{II}$$

$$p = p_H \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Charge par unité de longueur P'

$$\text{Nombre de contact } \Pi = \frac{P' \sum \rho}{E_m}$$

$$b \sum \rho = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \Pi$$

$$\frac{p_H}{E_m} = \sqrt{\frac{\Pi}{2\pi}}$$

$$\text{Rapprochement moyen : } h = 2,537 \frac{P^{0,9}}{E_m^{0,9} l_a^{0,8}} \quad \text{où } \begin{cases} P = \text{charge totale} \\ l_a = \text{longueur de contact} \end{cases} \quad (\text{Lundberg})$$

Pression spécifique (cylindre sur plan) : $k = \frac{P}{l_a D}$ où D = diamètre du cylindre

Pression de Stribeck : Pression spécifique du problème cylindre-plan équivalent (*mêmes p et p_H*)

$$p_s = \frac{P' \sum \rho}{2} = \pi \frac{p_H^2}{E_m} = \frac{E_m}{2} \Pi \quad ; \quad p_H = \sqrt{\frac{p_s E_m}{\pi}}$$

5) LIMITES ELASTIQUES

$$\text{Contact linéaire et ponctuel } \tau_{st} = T_{st} p_H \leq \tau_{\text{lim él}} = \frac{R_e}{2}$$

6) SOLLICITATIONS DYNAMIQUES

$$\frac{p_H}{p_H^*} = \left(\frac{N^*}{N} \right)^{\alpha_H} \quad \text{avec} \quad \alpha_H = \begin{cases} 1/9 & (\text{contacts ponctuels}) \\ 1/8 & (\text{contacts linéaires}) \end{cases}$$

$$\text{Limite en } N^* = 33Mc : p_H^* \approx \begin{cases} 0,5HB & (\text{contact ponctuel}) \\ 0,3HB & (\text{contact linéaire}) \end{cases} \quad (D'après Niemann)$$

7) LIMITATION DE LA DÉFORMATION PERMANENTE

Applicable aux aciers de dureté $HV = 7500 \dots 8500 \text{ MPa}$.

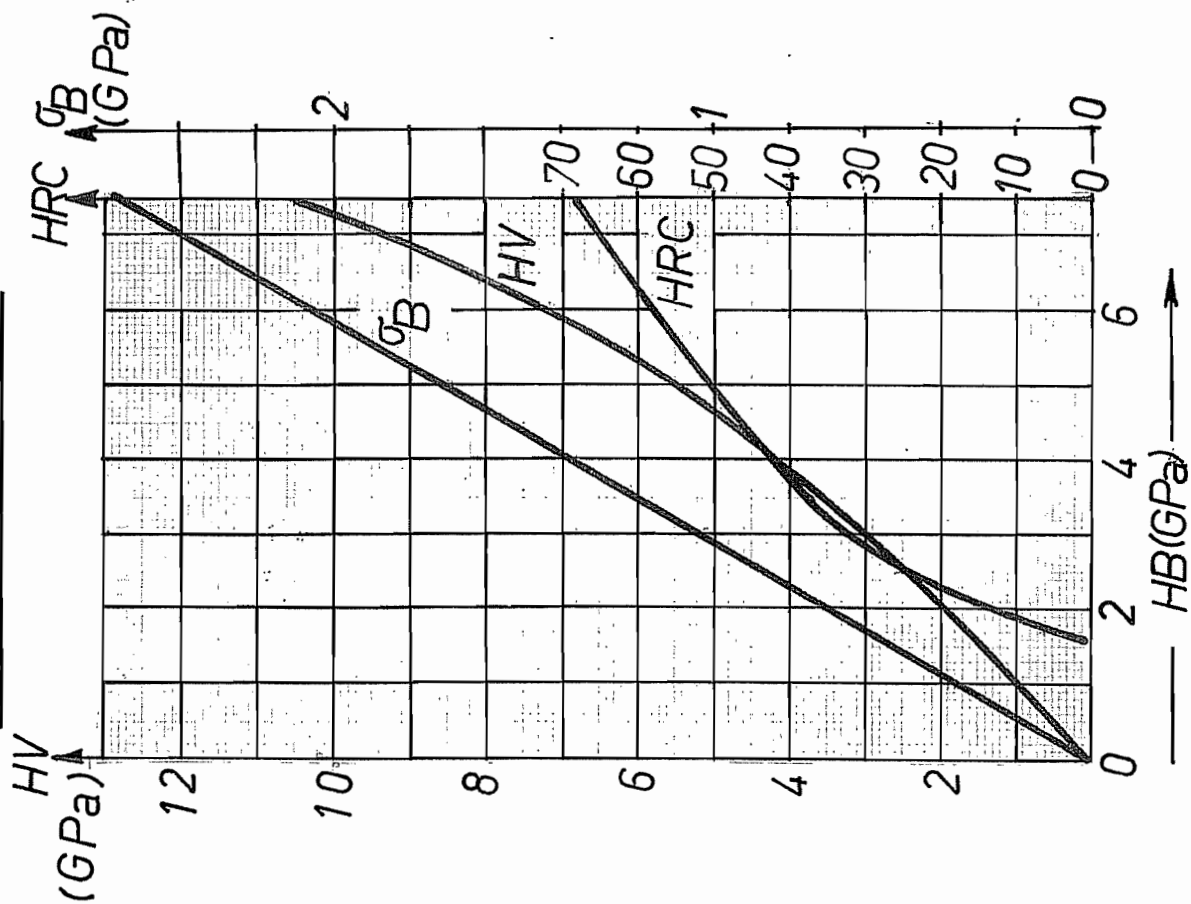
δ_p = déformation permanente totale (é^{lt} roulant + piste). (piste = 2/3, é^{lt} roulant = 1/3)

$$\text{Bille } \phi = D \text{ sur piste : } \frac{k}{\text{MPa}} = \frac{1291}{\frac{D}{2} \sqrt{(\rho_{1I} + \rho_{1II})(\rho_{2I} + \rho_{2II})}} \sqrt{\frac{\delta_p}{D}}$$

$$\text{Rouleau } \phi = D \text{ sur piste : } \frac{k}{\text{MPa}} = \frac{2605 \sqrt[3]{\frac{\delta_p}{D}}}{\frac{D}{2} \sum \rho}$$

DURETÉ DES ACIERS

CORRESPONDANCE



DURETÉ MAXIMALE

(U.S. National Bureau of Standards)

